Dr. Emanuel Scheidegger
Dipl. Math. Julia Eich

Modulformen I
WS 09/10
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Übungsblatt 7

Modulformen für Γ_1

25. Bestimmung einer Modulform aus ihren Fourier–Koeffizienten.
(4 Punkte) Es sei $d_k = \dim_{\mathbb{C}} M_k(\Gamma_1)$ die Dimension des Vektorraumes der holomorphen Modulformen vom Gewicht k. Zeigen Sie, dass gilt: Zu jedem d_k-Tupel komplexer Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{d_k-1}$ existiert genau eine Modulform vom Gewicht k, deren erste d_k Fourierkoeffizienten gerade die vorgegebenen Zahlen sind.

26. Die Ramanujan τ–Funktion

    (a) (1 Punkt) Benützen Sie die Relationen zwischen geeigneten Eisensteinreihen, um σ_7 durch σ_3, σ_9 durch σ_3 und σ_5, und σ_{13} durch σ_5 und σ_7 auszudrücken.

    (b) (1 Punkt) Bestimmen Sie die lineare Relation zwischen E_{12}, E_6^2 und Δ.

    (c) (1 Punkt) Schreiben Sie $\Delta(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$. Drücken Sie $\tau(n)$ durch σ_{11} und σ_5 aus.

    (d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \bmod 691$.

27. Schwach holomorphe Modulformen
Es sei $f \in M_k^!(\Gamma_1)$, $\in \mathbb{Z}$. Schreiben Sie $k = 12\ell + k'$ mit eindeutig bestimmtem $\ell \in \mathbb{Z}$ und $k' \in \{0, 4, 6, 8, 10, 14\}$.

    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\nu_\infty \leq \ell$ für jedes $f \neq 0$.

    (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass es für jede ganze Zahl $m \geq -l$ ein $f_{k,m} \in M_k^!(\Gamma_1)$ gibt, dessen Fourierreihen–Entwicklung die Form $f_{k,m}(\tau) = q^{-m} + O(q^{\ell+1})$ hat.

    (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\{f_{k,m} | m \geq -l\}$ eine Basis für $M_k^!(\Gamma_1)$ ist.

    (d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Koeffizienten $a_k(m,n)$ in der Fourierreihen–Entwicklung $f_{k,m} = q^{-m} + \sum_{n \geq \ell+1} a_k(m,n) q^n$ ganzzahlig sind und geben Sie die Koeffizienten für $k = 0, m = 0, 1, 2$ und für kleine n an.

28. Die elliptische Kurve in Hesse–Form und ihre j–Invariante.

(a) (2 Punkte) Es sei $(x : y : z) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ und $a \in \mathbb{C}$. Bringen Sie die elliptische Kurve $E = \{x^3 + y^3 + z^3 - 3axyz = 0\}$ in Weierstrassform.

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die j–Invariante dieser elliptischen Kurve.

Abgabetermin: Freitag, 4.12.2009 um 10:00 Uhr.